Dirac 方程式

さおき

2018 年 6 月 14 日

1　四元数

四元数を用いて Dirac 方程式を作る．四元数とは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{1}$$
$$ijk = -1 \tag{2}$$

を満たす i, j, k について

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \tag{3}$$

と置いたものである．ただし，$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ である．四元数の全体を $\mathbb{H}$ とする:

$$\mathbb{H} = \{a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

例えば,

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

は四元数の表現の 1 つである．

Thm 1. 四元数の虚部 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k, b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ について

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{6}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

とすれば，四元数の積 ab について

$$ab = -a \cdot b + a \times b \tag{8}$$

特に $a^2 = -a \cdot a = -\|a\|^2$ である．

四元数 a の複素共役を

$$\bar{a} \coloneqq a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \tag{9}$$

と定める．四元数 a,b について，$\alpha = a + \sqrt{-1}b$ と置いたものを複素化した四元数といい，その全体を $\mathbb{H}^C$ とする．複素化した四元数の複素共役を

$$\bar{\alpha} \coloneqq \bar{a} - \sqrt{-1}\,\bar{b} \tag{10}$$

と定める．

2 Dirac 方程式

以下 $\hbar = c = 1$ の単位系を用いる．このとき，特殊相対論では物体のエネルギー E と運動量 p には

$$E^2 = \|p\|^2 + m^2$$

の関係があった．これを量子力学に移行するには

$$E \to \hat{H} = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^0} \quad p_i \to \hat{p}_i = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{11}$$

としてやればよかった．Dirac 方程式はこれを時間，空間の 1 階微分で書いた式である．ある行列 α,β について $E = p\alpha + m\beta$ として

$$E^2 = p^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + pm(\alpha\beta + \beta\alpha) = \|p\|^2 + m^2$$

したがって

$$p^2\alpha^2 = \|p\|^2 \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0 \quad \beta^2 = 1 \tag{12}$$

を満たさなければならない．ここで α,β として，$I_1, \sqrt{-1}I_2$ をとれば，2 番，3 番目の式は満たされる．最初の式は $p^2 = -\|p\|^2$ となるから．四元数の虚部を用いて $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ とすれば満たされる．これによって，

$$E = pI_1 + m\sqrt{-1}I_2 \tag{13}$$

この時 I の選び方，符号には任意性があることに注意せよ．この式を (11) 式によって量子化すれば，Dirac 方程式が得られる．また (13) 式の代わりにその両辺に $\sqrt{-1}I_2$ をかけて

$$\sqrt{-1}\,(EI_2 - pI_2I_1) - m = \sqrt{-1}\,(EI_2 + pI_3) - m = 0 \tag{14}$$

と変形した式がよく用いられる．

I やその符号には任意性があったから色々な表示が存在する．よく用いたれるのは Dirac-Pauli 表示と Wyle-Chiral 表示である．Wyle 表示は式 (14) を

$$\sqrt{-1}\,(EI_1 - pI_2) - m = 0 \tag{15}$$

としたものであり

$$\begin{aligned}
EI_1 &= \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^0}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^0} \\
pI_2 &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}i + \frac{\partial}{\partial x^2}j + \frac{\partial}{\partial x^3}k\right]\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}i \\ -\sqrt{-1}i & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots
\end{aligned}$$

だから，ガンマ行列 $\gamma_W^\mu(\mu = 0, \cdots, 3)$ を

$$\gamma_W^0 = \sqrt{-1}I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_W^1 = \sqrt{-1}iI_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}i \\ \sqrt{-1}i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_W^2 = \cdots \tag{16}$$

と定義することで，Dirac 方程式は

$$\left[\sqrt{-1}\gamma_W^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\psi = 0 \tag{17}$$

のように書くことができる．ここで，Einstein の縮約を用いた．

Dirac 表示は式 (14) を

$$\sqrt{-1}(EI_3 + pI_2) - m = 0 \tag{18}$$

としたもので，ガンマ行列 γ_D^μ を

$$\gamma_D^0 = \sqrt{-1}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_D^1 = -\sqrt{-1}iI_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}i \\ -\sqrt{-1}i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_D^2 = \cdots \tag{19}$$

とすることで

$$\left[\sqrt{-1}\gamma_D^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\psi = 0 \tag{20}$$

とかける．

3　Lorentz 共変性

Dirac 方程式は Lorentz 変換に対して，不変でなければならない．Lorentz 変換とは四元数空間上の線形等長変換である．$I^\mu = (I_1, iI_2, jI_2, kI_2)$ とすれば，Dirac 方程式の表示として，

$$\left[I^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\psi = 0 \tag{21}$$

をえる．このとき波動関数 ψ は四元数空間上の二次元のベクトルである．ψ は慣性系を変えても式 (21) を満たす必要がある．つまり，Lorentz 変換 $x \to x'$ で $\psi \to \psi'$ と変化する時，ψ' は座標 x' で式 (21) を満たさなければならない．Lorentz 変換の全体は Lie 群をなし，その元は

$$g = (g_\nu^\mu) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ -v_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ -v_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

である．また

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．

$x^\mu \to x^{\mu\prime} = g^\mu_\nu x^\nu$ によって $\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x)$ となるとする．ここで S は四元数を成分とした 2×2 行列である．この時

$$
\begin{aligned}
I^\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x^{\mu\prime}} &= I^\mu S \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = mS\psi \\
\therefore m\psi &= S^{-1} I^\mu S \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = I^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \\
\therefore S^{-1} I^\mu S &= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} I^\nu = g^\mu_\nu I^\nu \qquad (23)
\end{aligned}
$$

式 (23) の右辺は v, θ について微分可能であるから，S も微分可能である．$v = 0, \theta = 0$ の時，$S = E_2$ であり，v, θ が十分小さい時

$$
\begin{aligned}
g^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu + \cdots \\
S &= E_2 + A + \cdots
\end{aligned}
$$

となるから，ε, A の 2 次以上の項を無視する．また ε は

$$
(\varepsilon^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ -v_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ -v_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (24)
$$

である．この近似によって．式 (23) は

$$
\begin{aligned}
S^{-1} I^\mu S &= (E_2 - A) I^\mu (E_2 + A) = I^\mu + [I^\mu, A] = I^\mu + \varepsilon^\mu_\nu I^\nu \\
\therefore [I^\mu, A] &= \varepsilon^\mu_\nu I^\nu
\end{aligned}
$$

となる．さて，$A = a_\lambda I^\lambda + b_{\lambda\rho} I^\lambda I^\rho$ とおき，A を決定する．a, b は v, θ の一次の関数で，実数とする．まず $I^\lambda I^\rho$ については

	$I^0 = I_1$	$I^1 = iI_2$	$I^2 = jI_2$	$I^3 = kI_2$
$I^0 = I_1$	-1	iI_3	jI_3	kI_3
$I^1 = iI_2$	$-iI_3$	1	$-k$	j
$I^2 = jI_2$	$-jI_3$	k	1	$-i$
$I^3 = kI_2$	$-kI_3$	$-j$	i	1

だから $a = 0$ となる．また b については

$$
\begin{aligned}
[I^\mu, b_{\lambda\rho} I^\lambda I^\rho] &= b_{\lambda\rho}[I^\mu, I^\lambda I^\rho] = b_{\lambda\rho}\left\{ I^\mu I^\lambda I^\rho - I^\lambda I^\rho I^\mu \right\} \\
&= b_{\lambda\rho}\left\{ \left(I^\mu I^\lambda + I^\lambda I^\mu \right) I^\rho - I^\lambda \left(I^\mu I^\rho + I^\rho I^\mu \right) \right\} \\
&= b_{\lambda\rho}\left\{ -2\eta^{\mu\lambda} I^\rho - I^\lambda(-2\eta^{\mu\rho}) \right\} \\
&= -2\eta^{\mu\lambda}(b_{\lambda\rho} - b_{\rho\lambda}) I^\rho = \varepsilon^\mu_\nu I^\nu
\end{aligned}
$$

したがって，b が下つき添字の入れ替えについて反対称とすれば，

$$
b_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\eta_{\mu\lambda}\varepsilon^\lambda_\nu = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}
$$

$$
(\varepsilon_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_x & -v_y & -v_z \\ v_x & 0 & -\theta_z & \theta_y \\ v_y & \theta_z & 0 & -\theta_x \\ v_z & -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}
$$

よって $A=-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^\mu I^\nu$ となる．行列 S の全体は Lie 群になり，この v,θ は第一種標準座標系となるから，

$$S=\exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^\mu I^\nu\right) \tag{25}$$

である．これを用いて Lorentz 変換で不変な，あるいは共変的な量を作ることができる．$\psi:=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ とする時 $\psi^\dagger:=(\bar{\psi_1},\bar{\psi_2})$ と定めるとこれの満たす方程式は

$$\left[I^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-m\psi\right]^\dagger=\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^\mu}I^{\mu\dagger}-m\psi^\dagger=0 \tag{26}$$

ここで $I^{\mu\dagger}=(-I_1,iI_2,jI_2,kI_3)=(-I^0,I^1,I^2,I^3)$ である．さて

$$I^0I^{\mu\dagger}I^{0\dagger}=-I^\mu$$

であるから，式 (26) に右から $I^{0\dagger}$ をかけることで

$$\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^\mu}I^{\mu\dagger}I^{0\dagger}-m\psi^\dagger I^{0\dagger}=\frac{\partial\psi^\dagger I^{0\dagger}}{\partial x^\mu}I^0I^\mu I^{0\dagger}-m\psi^\dagger I^{0\dagger}=-\frac{\partial\psi^\dagger I^{0\dagger}}{\partial x^\mu}I^\mu-m\psi^\dagger I^{0\dagger}=0 \tag{27}$$

$\psi^*:=\psi^\dagger I^{0\dagger}$ とすれば，

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}I^\mu=-m\psi^* \tag{28}$$

を満たす．

そこで $\rho:=\sqrt{-1}\psi^*\psi, J^\mu:=\psi^*I^\mu\psi$ とすれば

$$\rho'=\sqrt{-1}\psi^{*\prime}\psi'=\sqrt{-1}\psi^{\dagger\prime}I^{0\dagger}\psi'=\sqrt{-1}\psi^\dagger I^{0\dagger}I^0S^\dagger I^{0\dagger}S\psi=\sqrt{-1}\psi^*I^0S^\dagger I^{0\dagger}S\psi \tag{29}$$

ここで

$$\begin{aligned}I^0S^\dagger I^{0\dagger}&=I^0\exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^{\nu\dagger}I^{\mu\dagger}\right)I^{0\dagger}=I\exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^0I^{\nu\dagger}I^{0\dagger}I^0I^{\mu\dagger}I^{0\dagger}\right)\\&=\exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^\nu I^\mu\right)=\exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}I^\mu I^\nu\right)=S^{-1}\end{aligned}$$

よって式 (29) は

$$\rho'=\sqrt{-1}\psi^*S^{-1}S\psi=\sqrt{-1}\psi^*\psi=\rho$$

となり Lorentz 変換に対して不変である．同様に J^μ に対しても

$$J^{\mu\prime}=\psi^{*\prime}I^\mu\psi'=\psi^*S^{-1}I^\mu S\psi=\psi^*g^\mu_\nu I^\nu\psi=g^\mu_\nu J^\nu \tag{30}$$

となり共変である．また J^μ についてはさらに

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\psi^*I^\mu\psi}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}I^\mu\psi+\psi^*I^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}=-m\psi^*\psi+m\psi^*\psi=0 \tag{31}$$

を満たす．各 J^μ について

$$\bar{J^\mu}=\psi^\dagger I^{\mu\dagger}I^0\psi=\psi^\dagger I^0I^{0\dagger}I^{\mu\dagger}I^0\psi=-\psi^\dagger I^0I^\mu\psi=\psi^*I^\mu\psi=J^\mu \tag{32}$$

であるから $\exists j^\mu_0,\cdots,j^\mu_3\in\mathbb{R}\ (J^\mu=j^\mu_0+\sqrt{-1}(j^\mu_1 i+j^\mu_2 j+j^\mu_3 k))$ に対して $\frac{\partial j^\mu_\nu}{\partial x^\mu}=0$ を満たす．各 j^μ_ν は実数値関数である．

4 Dirac 方程式の解

4.1 自由粒子

Dirac 方程式の解を

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{33}$$

とする．ここで $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ で，a, b は四元数である．式 (21) に代入すると

$$\begin{aligned} \left[I^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\psi &= \left[-I^0 \sqrt{-1}E + I^i \sqrt{-1}p_i - m\right]\psi \\ &= \begin{pmatrix} -m & -E - \sqrt{-1}p \\ -E + \sqrt{-1}p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} = 0 \end{aligned}$$

ここで，p は四元数である．上の行列の行列式は 0 になるから，

$$\begin{aligned} m^2 - (E - \sqrt{-1}p)(E + \sqrt{-1}p) &= m^2 - (E^2 + p^2) = 0 \\ E^2 &= -p^2 + m^2 = \|p\|^2 + m^2 \\ \therefore E &= \pm\sqrt{\|p\|^2 + m^2} \end{aligned}$$

$E = \sqrt{\|p\|^2 + m^2} = |E|$ の時

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}(|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} = \begin{pmatrix} m \\ -\sqrt{\|p\|^2 + m^2} + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} Ce^{-\sqrt{-1}(|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} = \begin{pmatrix} m \\ -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} Ce^{-\sqrt{-1}(|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{34}$$

である．ここで C は任意の複素化した四元数である．

また $E = -\sqrt{\|p\|^2 + m^2} = -|E|$ の時

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}(-|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} = \begin{pmatrix} m \\ \sqrt{\|p\|^2 + m^2} + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} Ce^{-\sqrt{-1}(-|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} = \begin{pmatrix} m \\ |E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} Ce^{-\sqrt{-1}(-|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{35}$$

である．

上で定義した ρ, J^μ の意味を調べる．$E = |E|$ の時，ρ については

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{-1}\psi^*\psi = \sqrt{-1}\psi^\dagger I^{0\dagger}\psi = \sqrt{-1}\bar{C}\begin{pmatrix} m & -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} C \\ &= -\bar{C}\begin{pmatrix} m & -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|E| + \sqrt{-1}p \\ m \end{pmatrix} C = 2m\bar{C}(|E| - \sqrt{-1}p)C \end{aligned}$$

J^μ については

$$
\begin{aligned}
J^0 &= \psi^* I^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \bar{C}\begin{pmatrix} m & -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} C = \bar{C}(m^2 + (-|E| + \sqrt{-1}p)^2)C \\
&= \bar{C}(2|E|^2 - 2\sqrt{-1}|E|p)C = 2|E|\bar{C}(|E| - \sqrt{-1}p)C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^1 &= \psi^\dagger I^{0\dagger} I^1 \psi = \bar{C}\begin{pmatrix} m & -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} C \\
&= \bar{C}\begin{pmatrix} m & -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{-1}i & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ -|E| + \sqrt{-1}p \end{pmatrix} C \\
&= \sqrt{-1}\bar{C}\left(mim - (-|E| + \sqrt{-1}p)i(-|E| + \sqrt{-1}p)\right) \\
&= \sqrt{-1}\bar{C}\left(im^2 - (|E|^2 i - \sqrt{-1}|E|(pi + ip) - pip)\right)C = \sqrt{-1}\bar{C}\left(ip^2 + \sqrt{-1}|E|(pi + ip) + pip\right)C \\
&= \sqrt{-1}\bar{C}\left((ip + pi)p + \sqrt{-1}|E|(pi + ip)\right)C = \sqrt{-1}\bar{C}\left(-2(i \cdot p)p - \sqrt{-1}|E|2(p \cdot i)\right)C \\
&= 2(p \cdot i)\bar{C}\left(-\sqrt{-1}p + |E|\right)C = 2p_1\bar{C}(|E| - \sqrt{-1}p)C
\end{aligned}
$$

$$
J^2 = 2p_2\bar{C}(|E| - \sqrt{-1}p)C
$$

$$
J^3 = 2p_3\bar{C}(|E| - \sqrt{-1}p)C
$$

そこで $2\bar{C}\left(|E| - \sqrt{-1}p\right)$C=1 となるように C を選ぶと，$\rho = m, J^\mu = (|E|, \vec{p})$ とできる．よって，ρ を質量，J^μ を 4 元運動量と解釈できる．$|E| + m + \sqrt{-1}p$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(|E| + m + \sqrt{-1}p)(|E| - \sqrt{-1}p)(|E| + m + \sqrt{-1}p) = (|E| - \sqrt{-1}p)(|E| + m + \sqrt{-1}p)^2 \\
&= (|E| - \sqrt{-1}p)2(|E| + m)(|E| + \sqrt{-1}p) = 2(|E| + m)(|E|^2 + p^2) = 2m^2(|E| + m)
\end{aligned}
$$

そこで $C = \frac{|E|+m+\sqrt{-1}p}{2m\sqrt{|E|+m}}$ とおけば良い．

4.2　1 次元ポテンシャルの下での粒子

ここでは Dirac 方程式として，$\hat{H} = \hat{p}I_2 + m\sqrt{-1}I_3$ を採用する．一次元ポテンシャル $V(x)$ の下で $\psi(t,x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}Et}$ と仮定すると $\hat{H} \to \hat{H} - V(x)$ となり

$$
\begin{aligned}
&[E - V(x)]\psi = \left[\hat{p}I_2 + m\sqrt{-1}I_3\right]\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{p} \\ \hat{p} & 0 \end{pmatrix}\psi + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} m & -\hat{p} \\ \hat{p} & -m \end{pmatrix}\psi \\
&\therefore \begin{pmatrix} E - V(x) - m & \hat{p} \\ -\hat{p} & E - V(x) + m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}Et} = 0
\end{aligned}
$$

したがって，次の二つの式が得られる：

$$
[E - V(x) - m]\psi_1 + \hat{p}\psi_2 = 0 \tag{36}
$$

$$
-\hat{p}\psi_1 + [E - V(x) + m]\psi_2 = 0 \tag{37}
$$

式 (37) を変形すると

$$\psi_2 = \frac{\hat{p}\psi_1}{E - V(x) + m}$$
$$\therefore [E - V(x) - m]\,\psi_1 + \hat{p}\frac{\hat{p}\psi_1}{E - V(x) + m} = 0$$

$V(x)$ が x のみの函数だから，ψ_1, ψ_2 を x のみの函数とする．よって $\hat{p}\psi_1 = i\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$ となり

$$[E - V(x) - m]\,\psi_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{E - V(x) + m}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right] = 0 \tag{38}$$

とかける．ここで

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g^2(E - V(x) + m) + (E - V(x) - m) \tag{39}$$

を満たすある複素函数 g に対して

$$\psi_1 = \exp\left[-\int g(E - V(x) + m)dx\right]$$

と置くと

$$[E - V(x) - m]\,\psi_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left[-g\psi_1\right] = [E - V(x) - m]\,\psi_1 - \frac{\partial g}{\partial x}\psi_1 + g^2(E - V(x) + m)\psi_1 = 0$$

となり解である．この時 ψ_2 は

$$\psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{-1}}g\psi_1 \tag{40}$$

となるから結局 ψ は

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{-1}}g \end{pmatrix}\psi_1 e^{-\sqrt{-1}Et} \cdot C \tag{41}$$

ここで C は任意の複素化した四元数である．例えば，$V = -\frac{2m+1}{x^2+1}, E = -m$ の時，$g = x$ となり，